1A	1B	1C	2	3A	3B	3C	TOPLAM

ADI SOYADI:

NUMARA : **18.11.2019**

İST.453 ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK I ARASINAV SORULARI

SORU:1 $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}\,,\ \Sigma\right)$ dağılımında $j = 1, 2, 3$ için $E\left(X_j\right) = \mu_j$ ve $V\left(X_j\right) = \sigma_{jj}$ olup, X_j değişkenlerinin ilişkisiz olduğu bilinmektedir. Buna göre;

a) $\underline{X}$ rastgele değişkenler vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonunu ifade ediniz?

b) $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X_1} \\ \cdots \\ \underline{X_2} \end{bmatrix}$ öyle ki $\underline{X_1} = [X_3]$ ve $\underline{X_2} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ parçalanması altında X_3 değişkeni ile $\underline{X_2'}\underline{\beta}$ lineer bağıntısı arasındaki çoklu korelasyonu hesaplayınız?

c) (b)'deki parçalanma için $\underline{X_1}$ alt vektörünün marjinal varyansı ile $\underline{X_2} = \underline{x_2}$ iken $\underline{X_1}$ alt vektörünün şartlı varyansının birbirine eşit olduğunu gösteriniz?

SORU:2 $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}_{\underline{X}}\,,\ \Sigma_{\underline{X}}\right)$ dağılımının moment üreten fonksiyonu $M_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right) = exp\left\{2t_1^2 + \frac{3}{2}t_2^2 + 2t_3^2 + 2t_1t_3 + t_1 - t_2\right\}$ ve $\underline{Y} \sim N_3\left(\underline{\mu}_{\underline{Y}}\,,\ \Sigma_{\underline{Y}}\right)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu $f\left(\underline{y}\right) = kexp\left\{-\frac{1}{2}Q\left(\underline{y}\right)\right\}$ öyle ki $Q\left(\underline{y}\right) = \frac{5}{52}y_1^2 + \frac{7}{52}y_2^2 + \frac{5}{84}y_3^2 - \frac{3}{26}y_1y_2$ olsun. $\underline{X}$ ve $\underline{Y}$ vektörlerinin karşılıklı bağımsız olduğunu kabul edelim. Buna göre; $\underline{U} = \underline{X} + \underline{Y}$ rastgele vektörüne ait dağılımı ve karakteristik fonksiyonunu bulunuz?

SORU:3 $\underline{Y} \sim N_4\left(\underline{\mu},\ \Sigma\right)$ dağılımının moment çıkaran fonksiyonu $M_{\underline{Y}}\left(\underline{t}\right) = exp\left\{5t_1 + 3t_2 + 7t_3 + 4t_4 + \frac{1}{2}(4t_1^2 + 4t_2^2 + 9t_3^2 + 6t_4^2 + 4t_2t_3 - 2t_1t_2 - 6t_2t_4 + 8t_1t_4)\right\}$ olsun.

$Y = \begin{bmatrix} \underline{Y_1} \\ \underline{Y_2} \end{bmatrix} \ni \underline{Y_1} = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}\ ve\ \underline{Y_2} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_4 \end{bmatrix}$ parçalanması için,

a) $\underline{Y_1}$ alt vektörünün marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

b) $\underline{Y_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ iken $\underline{Y_1}$'in şartlı dağılımının parametrelerini bulunuz.

c) $\underline{Y_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ iken $\underline{Y_2}$'nin kısmi korelasyon matrisini bulunuz.

NOT: Sınav süresi 2 saattir

Başarılar dileriz
Doç. Dr. Yüksel ÖNER
Dr. Arş. Gör. Serpil AYDIN

İST.453 ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK I ARASINAV CEVAPLARI

18.11.2019

CEVAP:1 $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}\,,\Sigma\right)$ dağılımında $j = 1, 2, 3$ için $E\left(X_j\right) = \mu_j$ ve $V\left(X_j\right) = \sigma_{jj}$ olup, X_j değişkenleri ilişkisiz olsun.

a) Değişkenler ilişkisiz olduğundan $j \neq k = 1, 2\,, 3$ için $cov\left(X_j\,, X_k\right) = \sigma_{jk} = 0$ olacağından dağılımın varyans kovaryans matrisi : $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ şeklinde bir köşegen matristir. Ortalama vektörü ise $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$ vektörüdür. Böylece $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ rastgele vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$f\left(\underline{x}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1} \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)\right\}$ genel formundan faydalanarak yazılabilir.

Burada $p = 3$, $|\Sigma| = \sigma_{11} * \sigma_{22} * \sigma_{33}$, $\underline{x} - \underline{\mu} = \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ X_3 - \mu_3 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{33}} \end{bmatrix}$ alınırsa;

$$f\left(\underline{x}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}|\sigma_{11} * \sigma_{22} * \sigma_{33}|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 & X_2 - \mu_2 & X_3 - \mu_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{33}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ X_3 - \mu_3 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_1\sigma_2\sigma_3} exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{X_j - \mu_j}{\sigma_j}\right)^2\right\}$$

olarak elde edilir.

b) $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X_1} \\ \cdots \\ \underline{X_2} \end{bmatrix}$ öyle ki $\underline{X_1} = [X_3]$ ve $\underline{X_2} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ parçalanması altında dağılımın parametreleri de parçalanırsa;

$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu_1} \\ \cdots \\ \underline{\mu_2} \end{bmatrix}$ öyle ki $\underline{\mu_1} = [\mu_3]$ ve $\underline{\mu_2} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$ iken $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \cdots & \cdots \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$ öyle ki $\Sigma_{11} = [\sigma_{33}]$, $\Sigma_{12} = [0 \quad 0]$, $\Sigma_{21} = \Sigma_{12}{}'$ ve $\Sigma_{22} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ şeklinde parçalanır. Bu parçalanma altında X_3 değişkeni ile $\underline{X_2'}\underline{\beta}$ lineer bağıntısı arasındaki çoklu korelasyon;

$\rho_{X_3 \cdot \underline{X}_2' \underline{\beta}} = \frac{\left(\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}{}^{-1}\,\Sigma_{21}\right)^{1/2}}{\sigma_3}$ bağıntısı ile bulunur.

Burada $\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}{}^{-1}\,\Sigma_{21} = [0 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ olduğundan, $\rho_{X_3.\underline{X}_2'\underline{\beta}} = \frac{\sqrt{0}}{\sigma_3} = 0$ olarak elde edilir.

c) (b)'deki parçalanmaya göre, $\underline{X}_1 = [X_3]$ alt vektörünün marjinal varyansı, $V(X_3) = \sigma_{33}$ dür. $\underline{X}_2 = \underline{x}_2$ iken $\underline{X}_1 = [X_3]$ alt vektörünün marjinal şartlı varyansı ise;

$\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21} = \sigma_{33} - [0 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_{33} - 0 = \sigma_{33}$ olarak bulunur.

Görüldüğü üzere $\underline{X}_1 = [X_3]$ alt vektörünün marjinal varyansı ile $\underline{X}_2 = \underline{x}_2$ iken $\underline{X}_1 = [X_3]$ alt vektörünün marjinal şartlı varyansı birbirine eşittir.

CEVAP:2 Önce verilen her iki dağılım için dağılımlara ait parametreleri bulalım. $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu_X}, \Sigma_{\underline{X}}\right)$ dağılımının moment üreten fonksiyonu $M_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{2t_1^2 + \frac{3}{2}t_2^2 + 2t_3^2 + 2t_1t_3 + t_1 - t_2\right\}$ olarak verilmektedir. Bu fonksiyon çok değişkenli normal dağılımın moment üreten fonksiyonu olan $M_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}'\Sigma\,\underline{t}\right\}$ genel formuna benzer şekilde düzenlenerek dağılımın parametreleri bulunabilir.

$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{t_1 - t_2 + \frac{1}{2}(4t_1^2 + 3t_2^2 + 4t_3^2 + 4t_1t_3)\right\}$ olup, bu fonksiyona göre dağılımın parametreleri $\underline{\mu_X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma_{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

$\underline{Y} \sim N_3\left(\underline{\mu_Y}, \Sigma_{\underline{Y}}\right)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu $f\left(\underline{y}\right) = kexp\left\{-\frac{1}{2}Q\left(\underline{y}\right)\right\}$ öyle ki

$Q\left(\underline{y}\right) = \frac{5}{52}y_1^2 + \frac{7}{52}y_2^2 + \frac{5}{84}y_3^2 - \frac{3}{26}y_1y_2$ şeklinde verilmiştir. $Q\left(\underline{y}\right)$ karesel formuna ait terimlerin katsayılarından yararlanarak;

$\Sigma_{\underline{Y}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{52} & -\frac{3}{52} & 0 \\ -\frac{3}{52} & \frac{7}{52} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{84} \end{bmatrix}$ ve böylece ikinci dağılımın kovaryans matrisi $\Sigma_{\underline{Y}} = \left(\Sigma_{\underline{Y}}^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{84}{5} \end{bmatrix}$

olarak bulunur. Bu dağılımın ortalama vektörü ise; $\underline{\mu_Y} = \left[\frac{\partial Q(\underline{y})}{\partial \underline{y}} = \underline{0}\right]$ olup, $\frac{\partial Q(\underline{y})}{\partial \underline{y}} = 0$ lineer denklem sisteminin çözümünü bulmamız gerekir. $\frac{\partial Q(\underline{y})}{\partial \underline{y}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{26}y_1 - \frac{3}{26}y_2 \\ -\frac{3}{26}y_1 + \frac{7}{26}y_2 \\ \frac{5}{48}y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{26} & -\frac{3}{26} & 0 \\ -\frac{3}{26} & \frac{7}{26} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{48} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$

$2\Sigma_{\underline{Y}}^{-1}\underline{y} = \underline{0}$ olup, çözüm vektörü $\underline{\mu_Y} = \frac{1}{2}\Sigma_{\underline{Y}}\underline{0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 14 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{84}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

Şimdi $\underline{U} = \underline{X} + \underline{Y}$ rastgele vektörüne ait dağılımı bulalım. $\underline{X}$ ve $\underline{Y}$ vektörleri karşılıklı bağımsız ve normal dağılımlı olduğundan bunların doğrusal fonksiyonu olan $\underline{U}$ rastgele vektörünün de dağılımı normaldir ve $\underline{U} \sim N_3\left(E(\underline{U}),\ Cov(\underline{U})\right)$ olmalıdır. Burada ;

$E(\underline{U}) = E(\underline{X}+\underline{Y}) = E(\underline{X}) + E(\underline{Y}) = \ \underline{\mu}_X \ + \underline{\mu}_Y \ = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ ve

$Cov(\underline{U}) = Cov(\underline{X}+\underline{Y}) = Cov(\underline{X}) + Cov(\underline{Y})$,
($\underline{X}$ ve $\underline{Y}$ vektörleri karşılıklı bağımsız olduğundan)

$Cov(\underline{U}) = \Sigma_{\underline{X}} + \Sigma_{\underline{Y}} = \begin{bmatrix}4&0&2\\0&3&0\\2&0&4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}14&6&0\\6&10&0\\0&0&\frac{84}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18&6&2\\6&13&0\\2&0&\frac{104}{5}\end{bmatrix}$ dir. Böylece

$\underline{U}\sim N_3\left(\underline{\mu}_U = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \ \Sigma_{\underline{U}} = \begin{bmatrix}18&6&2\\6&13&0\\2&0&\frac{104}{5}\end{bmatrix}\right)$ dağılımının karakteristik fonksiyonu, $\underline{t}\epsilon IR^3$ olmak üzere

$\Phi_{\underline{U}}(\underline{t}) = exp\left\{i\underline{t}'\underline{\mu}_U - \frac{1}{2}\underline{t}'\Sigma_{\underline{U}}\underline{t}\right\} = exp\left\{it_1 - it_2 - \frac{1}{2}\left(18t_1^2 + 13t_2^2 + \frac{104}{5}t_3^2 + 12t_1t_2 + 4t_1t_3\right)\right\}$
olarak bulunur.

CEVAP:3 $\underline{Y}\sim N_4\left(\underline{\mu}\,,\Sigma\right)$ dağılımının moment çıkaran fonksiyonu $M_{\underline{Y}}(\underline{t}) = exp\left\{5t_1 + 3t_2 + 7t_3 + 4t_4 + \frac{1}{2}(4t_1^2 + 4t_2^2 + 9t_3^2 + 6t_4^2 + 4t_2t_3 - 2t_1t_2 - 6t_2t_4 + 8t_1t_4)\right\}$ olarak veriliyor. Buna göre dağılımın parametreleri $M_{\underline{Y}}(\underline{t}) = exp\left\{\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}'\Sigma\,\underline{t}\right\}$ genel formu gereğince;

$\underline{\mu} = \begin{bmatrix}5\\3\\7\\4\end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \begin{bmatrix}4&-1&0&4\\-1&4&2&-3\\0&2&9&0\\4&-3&0&6\end{bmatrix}$ şeklindedir. Şimdi $\underline{Y} = \begin{bmatrix}\underline{Y_1}\\ \cdots\\ \underline{Y_2}\end{bmatrix}$ öyle ki $\underline{Y_1} = \begin{bmatrix}Y_2\\Y_3\end{bmatrix}$ ve $\underline{Y_2} = \begin{bmatrix}Y_1\\Y_4\end{bmatrix}$ parçalanmasını ele alalım. Bu parçalanmaya göre dağılımın parametrelerini de parçalayalım.

$\underline{\mu} = \begin{bmatrix}\underline{\mu_1}\\ \cdots\\ \underline{\mu_2}\end{bmatrix}$ öyle ki $\underline{\mu_1} = \begin{bmatrix}\mu_2\\\mu_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$ ve $\underline{\mu_2} = \begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$ iken $\Sigma = \begin{bmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\ \cdots&\cdots\\ \Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{bmatrix}$ öyle ki

$\Sigma_{11} = \begin{bmatrix}4&2\\2&9\end{bmatrix}, \quad \Sigma_{12} = \begin{bmatrix}-1&-3\\0&0\end{bmatrix}, \quad \Sigma_{21} = \Sigma_{12}{}'$ ve $\Sigma_{22} = \begin{bmatrix}4&4\\4&6\end{bmatrix}$ şeklinde parçalanır. Buna göre;

a) $\underline{Y_1}$ alt vektörünün marjinal dağılımı $\underline{Y_1} = \begin{bmatrix}Y_2\\Y_3\end{bmatrix}\sim N_2\left(\underline{\mu}_1 = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}, \Sigma_{11} = \begin{bmatrix}4&2\\2&9\end{bmatrix}\right)$ olup, bu dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$f_{\underline{Y_1}}\left(\underline{y_1}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma_{11}|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{y_1} - \underline{\mu_1}\right)' \Sigma_{11}^{-1}\left(\underline{y_1} - \underline{\mu_1}\right)\right\}$.....(*)

olacaktır. Burada $p = 2, |\Sigma_{11}| = \begin{vmatrix}4&2\\2&9\end{vmatrix} = 32, \ \Sigma_{11}^{-1} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix}9&-2\\-2&4\end{bmatrix}$ ve $\underline{y_1} - \underline{\mu_1} = \begin{bmatrix}y_2-3\\y_3-7\end{bmatrix}$ ve

$$\left(\underline{y_1} - \underline{\mu_1}\right)' \Sigma_{11}^{-1}\left(\underline{y_1} - \underline{\mu_1}\right) = [y_2 - 3 \quad y_3 - 7]\frac{1}{32}\begin{bmatrix}9&-2\\-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_2-3\\y_3-7\end{bmatrix}$$

$$= \frac{9}{32}(y_2-3)^2 - \frac{4}{32}(y_2-3)(y_3-7) + \frac{4}{32}(y_3-7)^2$$

değerleri (*)’da yerlerine yazılırsa;

$f_{\underline{Y}_1}\left(\underline{y}_1\right) = \frac{1}{(2\pi)|32|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{9}{32}(y_2-3)^2 - \frac{4}{32}(y_2-3)(y_3-7) + \frac{4}{32}(y_3-7)^2\right]\right\}$ olarak bulunur.

b) $\underline{Y}_2 = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ iken $\underline{Y}_1$ alt vektörünün şartlı dağılımının parametreleri sırasıyla;

şartlı ortalama; $\underline{\mu}_{1.2} = \underline{\mu}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\left(\underline{y}_2 - \underline{\mu}_2\right) = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & -3\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 4\\4 & 6\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & -3\\0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{8}\begin{bmatrix}6 & -4\\-4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} + \frac{1}{8}\begin{bmatrix}6 & -8\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/4\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13/4\\7\end{bmatrix}$

ve şartlı kovaryans; $\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = \begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & -3\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 4\\4 & 6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\\-3 & 0\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & -3\\0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{8}\begin{bmatrix}6 & -4\\-4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\-3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 9\end{bmatrix} - \frac{1}{8}\begin{bmatrix}6 & -8\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\-3 & 0\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{18}{8} & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{14}{8} & 2\\2 & 9\end{bmatrix}$ olarak bulunur.

c) $\underline{Y}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ iken $\underline{Y}_2$ alt vektörünün kısmi korelasyon matrisi; $R_{22.1} = K^{-1/2}\Sigma_{22.1}K^{-1/2}$ ile bulunur. Önce $\Sigma_{22.1}$ şartlı kovaryans matrisini bulmalıyız.

$\Sigma_{22.1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} = \begin{bmatrix}4 & 4\\4 & 6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 0\\-3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 9\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & -3\\0 & 0\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}4 & 4\\4 & 6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 0\\-3 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{32}\begin{bmatrix}9 & -2\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -3\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 4\\4 & 6\end{bmatrix} - \frac{1}{32}\begin{bmatrix}-1 & 0\\-3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-9 & -27\\2 & 6\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\frac{119}{32} & \frac{101}{32}\\\frac{101}{32} & \frac{111}{32}\end{bmatrix}$ bulunur. Buna göre $K^{1/2} = Köş\left[\sqrt{\frac{119}{32}} \;,\; \sqrt{\frac{111}{32}}\right]$ ve $K^{-1/2} = Köş\left[\sqrt{\frac{32}{119}} \;,\; \sqrt{\frac{32}{111}}\right]$ olup, bu değerler eşitlikte yerlerine yazılırsa;

$$R_{22.1} = \begin{bmatrix}\sqrt{\frac{32}{119}} & 0\\0 & \sqrt{\frac{32}{111}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{119}{32} & \frac{101}{32}\\\frac{101}{32} & \frac{111}{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{32}{119}} & 0\\0 & \sqrt{\frac{32}{111}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{\frac{119}{32}} & \frac{101}{\sqrt{119*32}}\\\frac{101}{\sqrt{111*32}} & \sqrt{\frac{111}{32}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{32}{119}} & 0\\0 & \sqrt{\frac{32}{111}}\end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix}1,00 & 0,879\\0,879 & 1,00\end{bmatrix}$

olarak elde edilir.